Concours des 28, 29 et 30 mai 1985 d'admission en 1ère année à l'INSTITUT NATIONAL DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

***

MATHÉMATIQUES

(Options M.P.T.)

**

(à distribuer aux candidats)

NOTA :

Le candidat pourra admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite du problème, même s'il ne les a pas démontrés.

NOTATIONS :

Soient a et b deux réels avec a < b. Toute application de [a, b] dans $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique f(t) = g(t) + ih(t) où g et h sont deux applications de [a, b] dans $\mathbb{R}$. On rappelle les résultats suivants :

1°) f est continue si et seulement si g et h le sont ;

2°) f est alors intégrable et on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt + i\int_a^b h(t)\,dt ;$$

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt ;$$

$$3°)\ \int_a^b e^{i\alpha t}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\,(e^{i\alpha b} - e^{i\alpha a}) & \text{si } \alpha \neq 0 \\ b - a & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$

I - On donne l'équation différentielle :

$$(1)\quad x^2 y'' + x y' + (x^2 - k^2)\, y = 0 \text{ où } k \in \mathbb{N}.$$

1°) Déterminer la relation de récurrence vérifiée par les a_n pour que la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit solution de (1) sur un intervalle non vide]- α, α[. (On admettra provisoirement que le rayon de convergence d'une telle série est non nul).

2°) Montrer qu'alors $a_n = 0$ dans les 2 cas suivants : n - k est impair, n est strictement inférieur à k. Achever la détermination des a_n et préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

II - On pose dans toute la suite du problème :

$$(2)\quad \forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}\quad \begin{cases} J_k(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^k \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(k+p)!p!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \\ J_{-k}(x) = (-1)^k J_k(x). \end{cases}$$

1°) Prouver les égalités suivantes :

$$(3)\quad \forall k\in\mathbb{Z},\ \forall x\in\mathbb{R}\quad \begin{cases} x(J_{k-1}(x) + J_{k+1}(x)) = 2k\, J_k(x) \\ J_{k-1}(x) - J_{k+1}(x) = 2J'_k(x) \end{cases}$$

2°) On pose :

$$(4)\quad \forall k\in\mathbb{Z},\ \forall x\in\mathbb{R}\qquad I_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\sin\theta}\, e^{-ik\theta}\, d\theta$$

Montrér que l'on peut se borner au calcul des I_k avec $k\in\mathbb{N}$.

On fixe x dans $\mathbb{R}$ et on pose :

$$(5)\quad \forall N\in\mathbb{N},\ \forall k\in\mathbb{N},\ I_{k,N}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{i^n x^n(\sin\theta)^n}{n!}\right)e^{-ik\theta}\, d\theta.$$

Trouver un majorant de $\left| e^{ix\sin\theta} - \sum_{n=0}^{N}\frac{i^n x^n (\sin\theta)^n}{n!}\right|$ ne dépendant que de x et N. En déduire un majorant de $|I_k(x) - I_{k,N}(x)|$ ne dépendant que de x et N.

Prouver $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall k\in\mathbb{N}\quad I_k(x) = \lim_{N\to\infty} I_{k,N}(x)$

3°) Calculer, pour tout couple (k, n) de $\mathbb{N}^2$ $\quad (2i)^n\int_0^{2\pi}(\sin\theta)^n\, e^{-ik\theta}\, d\theta$

En déduire l'expression de $I_{k,N}(x)$ et un développement en série entière de $I_k(x)$ dont on précisera le rayon de convergence.

Vérifier que $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall k\in\mathbb{Z}\quad I_k(x) = J_k(x)$.

4°) Déduire des résultats précédents l'existence d'un $M \geqslant 0$ tel que :

$$(6)\quad \forall x\in\mathbb{R},\ \forall k\in\mathbb{Z}\quad |J_k(x)| \leqslant M.$$

Montrer alors par récurrence en utilisant les formules (3) que :

$$(7)\quad \forall x\in\mathbb{R},\ \forall k\in\mathbb{Z},\ \forall n\in\mathbb{N}\quad |J_k^{(n)}(x)| \leqslant M.$$

5°) Soit a un réel non nul tel que $J_k(a) = J_k'(a) = 0$.

Montrer qu'alors : $\forall n \in \mathbb{N}$ $J_k^{(n)}(a) = 0$. Montrer, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange au point a, que les inégalités (7) conduisent à : $\forall x \in \mathbb{R}$, $J_k(x) = 0$, et que l'on arrive ainsi à une contradiction.

Peut-on avoir pour un réel a non nul $J_k(a) = J_{k+1}(a) = 0$?

III - On se borne dans cette partie à x variant dans $]0, +\infty[$.

1°) On considère l'équation (1) pour k = 0

$x\,y'' + y' + x\,y = 0$, dans laquelle on fait le changement de fonction inconnue défini par $u(x) = \sqrt{x}\ y(x)$.

Montrer que u vérifie l'équation différentielle :

$$(8) \qquad u'' + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)u = 0$$

Soit v une solution quelconque de l'équation différentielle $v'' + v = 0$ et $\varphi = u\,v' - u'\,v$.

Montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi'(x) = \frac{u(x)\,v(x)}{4x^2} .$$

En déduire :

$$(9) \qquad \forall \alpha \in]0, +\infty[\quad u(\alpha + \pi) + u(\alpha) + \int_\alpha^{\alpha+\pi} \frac{u(x)\,\sin(x - \alpha)}{4x^2}\,dx. = 0 .$$

2°) Montrer à partir de (9) que, pour tout $\alpha > 0$, $J_0(x)$ s'annule en changeant de signe en un point de $]\alpha, \alpha + \pi[$.

3°) Obtenir à partir des formules (3) une relation entre $J_{k+1}(x)$ et la dérivée de $\frac{J_k(x)}{x^k}$.

Montrer alors qu'entre deux racines positives distinctes de J_k, il existe une racine de J_{k+1}.

L'ensemble des racines de J_k est-il borné supérieurement ?